Matemáticas y sistemas electorales

Sistemas de elección de preferencias agregadas

O. Garnica

19 de febrero de 2016

Esquema

Definiciones

- Google
  - Sistema político que defiende la soberanía del pueblo y el derecho del pueblo **a elegir** y controlar a sus gobernantes.
- RAE
  1. Forma de gobierno en la que el poder político es ejercido por los ciudadanos.
  2. País cuya forma de gobierno es una democracia.
  3. Doctrina política según la cual la soberanía reside en el pueblo, que ejerce el poder directamente o por medio de representantes.
  4. Forma de sociedad que practica la igualdad de derechos individuales, con independencia de etnias, sexos, credos religiosos, etc.
  5. Participación de todos los miembros de un grupo o de una asociación en la **toma de decisiones**.

Definiciones

- Wikipedia
  - Forma de organización social que atribuye la titularidad del poder al conjunto de la sociedad. En sentido estricto, la democracia es una forma de organización del Estado en la cual las **decisiones colectivas** son adoptadas por el pueblo mediante mecanismos de participación directa o indirecta ...
- Oxford English Dictionary:
  - A system of government in which all the people of a state or polity $<<\ldots>>$ are involved in **making decisions** about its affairs, typically by voting to elect representatives to a parliament or similar assembly.

Problema

- Hay que determinar un procedimiento para establecer las preferencias colectivas a partir de la agregación de las preferencias individuales.
- A la hora de expresar estas preferencias colectivas aparecen comportamientos “contra-intuitivos” si pensamos en términos de comportamientos individuales.

Comportamientos contra-intuitivos. Ejemplo (I)

- Juan Sin Nombre entra en una tienda de helados y viendo que tienen chocolate, frambuesa y vainilla, pide chocolate. Antes de que el dependiente sirva el helado éste dice "*Lo lamento pero no tenemos helados de frambuesa*". A lo que Juan responde: "*En ese caso tomaré vainilla*". ¿Extraño? Sustitúyase chocolate, frambuesa y vainilla por Rajoy, Sánchez y Rivera.
- **Violación IIA** . Lo veremos en detalle en el teorema de Arrow.

Comportamientos contra-intuitivos. Ejemplo (II)

- A Juan le gusta que el helado tenga toppings. Entra en la tienda y viendo que hay helados de chocolate, frambuesa y vainilla escoge chocolate. De nuevo, antes de servir el helado el vendedor le dice: "*Hoy el chocolate viene con topping gratis*". A lo que Juan responde: "*En ese caso tomaré vainilla*". ¿Extraño?
- **Violación de asociación positiva** o **monotonicidad**. Se puede demostrar que mejorando una opción puede resultar en que el grupo la rechace.

No-monotonicidad

Paradoja del doble turno

Votantes totales = 17

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Con un candidato muy votado

6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

- Por ejemplo, el método de Hare es no-monotono.

Comportamientos contra-intuitivos. Ejemplo (III)

- Juan va al supermercado donde hay arándanos (A) y bananas (B) y escoge arándanos. A continuación se le ofrecen banana y coco (C) y escoge banana. Finalmente se le ofrecen arándano y coco y escoge ...¡coco!. ¿Extraño?
- **Fallo de transitividad**. Paradoja de Condorcet. Esto es:

$$
\begin{aligned}
A &> B && (1)\\
B &> C &&\\
\text{pero} & && (2)\\
C &> A && (3)
\end{aligned}
$$

Conclusión

- Las preferencias colectivas tienen comportamientos distintos de las preferencias individuales.
- ¿Podemos hacer lo mismo con ambos tipos de preferencias? ¿Hay cosas que sean posibles con las preferencias individuales y que no sean posibles con las preferencias colectivas?
- Teoremas que vamos a presentar
  - Paradoja de Condorcet
  - Teorema de Arrow
  - Teorema Gibbard–Satterthwaite
  - Teorema de May

Método

1. Ordenar los candidatos por orden de preferencia. Se permite el empate, es decir, dar la misma preferencia a dos candidatos si no se tiene especial interés por alguno de ellos.
2. Comparar cada candidato en la papeleta con cada uno del resto. El que tenga mayor preferencia se anota un punto.
3. Sumar las victorias de cada candidato. El candidato que haya ganado a cada candidato más veces de las que ha perdido es el preferido y gana la elección.

Ejemplo

Voter	First preference	Second preference	Third preference
Voter 1	A	B	C
Voter 2	B	C	A
Voter 3	C	A	B

- Siempre se puede calcular la condición necesaria para que aparezca la paradoja. P.e. en el caso anterior la condición es $x + y \leq \frac{3}{2}$ siendo x fracción de votantes que $A > B$ e y fracción de votantes que $B > C$.

Enunciado (I)

- Sea A un conjunto de alternativas y N el número de votantes.

$$A = \{Arandanos, Banana, Coco\}$$

$$N = 3$$

- Sea $L\,(A)$ el conjunto de todos los ordenamientos lineales de A.

$$L\,(A) = \{A{>}B, B{>}C\} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- Se define la regla de agregación como una aplicación

$$F : L\,(A)^N \to L(A)$$

que agrega las preferencias de los votantes en un única preferencia sobre A.

Enunciado (II)

- (Cont'd)

$$F : \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \right) \rightarrow ? \tag{4}$$

- Características a cumplir por la función de agregación de preferencias:
  - **Ausencia de dictadura**:la regla de elección social no debería limitarse a seguir el orden de preferencia de un único individuo ignorando a los demás.
  - **Universalidad** : Cualquier individuo puede escoger el conjunto de preferencias que desee. Las preferencias de los individuos no pueden estar restringidas.

Enunciado (III)

- Características a cumplir por la función de agregación de preferencias (Cont'd):
  - **Unanimidad**: si la alternativa X resulta socialmente preferida a Y entonces debe existir al menos un individuo para el cual X sea preferido a Y. En otras palabras, si todos los individuos en el grupo prefieren X a Y entonces el grupo debe preferir X a Y.
  - **Independencia de las alternativas irrelevantes**: si restringimos nuestra atención a un subconjunto de opciones y les aplicamos la regla de elección social sólo a ellas entonces el resultado debiera ser compatible con el correspondiente para el conjunto de opciones completo. Los cambios en la forma que un individuo ordene las alternativas "irrelevantes" (es decir, las que no pertenecen al subconjunto) no debieran tener impacto en el ordenamiento que haga la sociedad del subconjunto "relevante". En otras palabras, la elección entre dos alternativas X e Y deberá depender solo de la posición relativa de estas dos posiciones y no de la posición relativa de una tercera Z.

Enunciado (IV)

- Teorema: Si el cuerpo de decisión tiene al menos dos miembros y al menos tres opciones entre las que decidir entonces **NO EXISTE** una regla de agregación de preferencias que satisfaga simultáneamente todos los criterios anteriores.

Enunciado

- Teorema aplicable a sistemas de votación que eligen un único ganador a partir de un ranking de preferencias expresado por cada votante.
- Dado un sistema de voto para la elección de un ganador con tres o más candidatos se debe cumplir al menos 1 de las siguientes reglas:
  1. La regla es dictatorial, o
  2. Hay algún candidato que nunca gana bajo la regla, o
  3. La regla es susceptible a votado táctico. Esto es, hay condiciones bajo las cuales un votante que tuviera un conocimiento completo de las preferencias del resto de votantes y del sistema de voto tiene un incentivo para votar de una manera que no refleja sus preferencias.

Ejemplo

- La Rioja
- Resultados
  1. PP: 67.736 votos (38.35 %).
  2. PSOE: 41.875 votos (23.71 %).
  3. Podemos: 27.941 votos (15.82 %).
  4. Ciudadanos: 26.719 votos (15.13 %).
- La Rioja elige a 4 diputados. La asignación de electos fue:
  1. PP: 2 diputados.
  2. PSOE: 1 diputado.
  3. Podemos: 1 diputado.
  4. Ciudadanos: 0 diputados.

Ejemplo (Cont'd)

- Un votante del PP, ¿habría tenido incentivo para votar de forma distinta?
    - Si 1223 votantes del PP hubiesen votado a Ciudadanos, los resultados hubieran cambiado expresando mejor sus preferencias.
        1. PP: 2 diputados
        2. PSOE: 1 diputado
        3. Ciudadanos: 1 diputado
        4. Podemos: 0 diputados

Enunciado

- Una función de decisión (sistema de voto) con un número impar de votantes satisface las siguientes cuatro condiciones si y solo si el sistema de voto sigue el método de mayoría simple.
- Condiciones:
  1. Resolutivo: La función de resolución mapea cada conjunto de preferencias a un único ganador.
  2. La función de resolución trata todos los votantes por igual.
  3. La función de resolución trata ambas alternativas por igual; si todos cambian su preferencia entonces se cambia la preferencia de grupo.
  4. Monotonicidad

Métodos de ganadores múltiples

- Método proporcional
  - Cada opción escogida debe representar el mismo número de votantes. P.e. que cada diputado en el congreso represente aproximadamente a 50000 votantes con un cierto margen de error.
  - La proporcionalidad del voto no se puede respetar completamente en **ningún** sistema. La única forma de asegurar totalmente dicha proporcionalidad sería que tuviéramos un parlamento con tantos diputados como votos depositados en las elecciones.
  - Para medir el margen de error (no proporcionalidad) se usa el índice de Gallagher que mide la diferencia entre el porcentaje de votos recibido y el porcentaje de escaños que ha recibido el partido.

$$GI = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (V_i - S_i)^2}$$

Métodos de ganadores múltiples

- Método proporcional. Clasificación
  - Métodos de promedio mayor se basan en la división sucesiva del total de votos de cada lista por una serie de divisores. Esto produce una tabla de cocientes, o promedios, con una fila para cada divisor y una columna para cada lista. El escaño n se asigna a la lista cuya columna contiene el n-ésimo mayor cociente, hasta repartir todos los escaños.
  - Métodos de resto mayor se basan en dividir el número de votos de cada lista entre un cociente que representa el número de votos requeridos para obtener un escaño. El resultado para cada partido se compondrá normalmente de una parte entera y un resto fraccional. En primer lugar se asigna a cada lista un número de escaños igual a su parte entera. Esto dejará normalmente algunos escaños sin asignar. Entonces se ordenan los partidos en función de sus restos, y los partidos con mayores restos obtienen un escaño extra cada uno, hasta repartir todos los escaños.

Métodos de ganadores múltiples

- Métodos semi-proporcionales. Ejemplo
    - Representación proporcional mixta. Sistema proporcional más un número específico de electos que se eligen por mayoría simple. P.e. se votan dos representantes: uno por circunscripción y otro por partido.
- Métodos mayoritarios

Métodos de ganador único

- Sistema de un solo voto
  - First-past-the-post
  - Runoff methods. La version más ampliamente usada Two-top runoff (doble vuelta).
  - Elección aleatoria. Cada votante emite un voto y se escoge uno de ellos al azar.
- Sistemas de ranking o sistemas de voto preferencial
  - Instant-runoff voting. Cada votante expresa sus preferencias y en sucesivas rondas se van eliminando las alternativas menos votadas y usando las siguientes preferencias de aquellos que votaron las alternativas menos votadas.
  - Condorcet.
- Sistemas de valoración
  - El votante da una puntuación a las alternativas

Método

1. Se escrutan todos los votos. Llamamos V_i al número de votos de la lista electoral i.
2. Se calculan coeficientes sucesivos para cada lista electoral.

$$cociente_i = \frac{V_i}{s_i + 1}$$

donde:

- V_i es el número de votos de la lista electoral i.
- s: es el número de escaños que cada lista se ha llevado hasta el momento.

3. Se le asigna el escaño al partido con el mayor cociente.
4. Se repite el procedimiento hasta alcanzar el número de escaños en juego.

Ejemplo

	Partido A	Partido B	Partido C	Partido D	Partido E
Votos	340 000	280 000	160 000	60 000	15 000
Escaño 1	(340 000/1 =) 340 000	(280 000/1 =) 280 000	(160 000/1 =) 160 000	(60 000/1 =) 60 000	(15 000/1 =) 15 000
Escaño 2	(340 000/2 =) 170 000	(280 000/1 =) 280 000	(160 000/1 =) 160 000	(60 000/1 =) 60 000	(15 000/1 =) 15 000
Escaño 3	(340 000/2 =) 170 000	(280 000/2 =) 140 000	(160 000/1 =) 160 000	(60 000/1 =) 60 000	(15 000/1 =) 15 000
Escaño 4	(340 000/3 =) 113 333	(280 000/2 =) 140 000	(160 000/1 =) 160 000	(60 000/1 =) 60 000	(15 000/1 =) 15 000
Escaño 5	(340 000/3 =) 113 333	(280 000/2 =) 140 000	(160 000/2 =) 80 000	(60 000/1 =) 60 000	(15 000/1 =) 15 000
Escaño 6	(340 000/3 =) 113 333	(280 000/3 =) 93 333	(160 000/2 =) 80 000	(60 000/1 =) 60 000	(15 000/1 =) 15 000
Escaño 7	(340 000/4 =) 85 000	(280 000/3 =) 93 333	(160 000/2 =) 80 000	(60 000/1 =) 60 000	(15 000/1 =) 15 000
Escaños asignados	**3**	**3**	**1**	**0**	**0**
Escaños proporcionales	2,78	2,29	1,31	0,49	0,12

Caso español

- La ley D'Hont se aplica por circunscripciones electorales.
- Todas las circunscripciones tienen asignados un mínimo de 2 disputados, excepto Ceuta y Melilla que tienen asignado 1. El resto de diputados se asigna de la siguiente forma:
    1. Se obtiene una cuota de reparto resultante de dividir por doscientos cuarenta y ocho la cifra total de la población de derecho de las provincias peninsulares e insulares.
    2. Se adjudican a cada provincia tantos Diputados como resulten, en números enteros, de dividir la población de derecho provincial por la cuota de reparto.
    3. Los Diputados restantes se distribuyen asignando uno a cada una de las provincias cuyo cociente, obtenido conforme al apartado anterior, tenga una fracción decimal mayor.

Caso español

- No se tienen en cuenta aquellas candidaturas que no hubieran obtenido, al menos, el 3 % de los votos válidos emitidos en la circunscripción.
- Sobrerrepresenta las circunscripciones con menor población: Teruel, Soria, ...
- ¿Eliminamos las circunscripciones? Nuevos problemas. P.e.:
    - Unas cuantas poblaciones (Barcelona, Madrid, Valencia, ...) decidirían ellas solas el resultado de las elecciones. Los políticos se tendrían que concentrar en mejorar la vida en dichas poblaciones, para ganar votos, y se podrían olvidar de mantener los hospitales en Soria o de hacer carreteras en Jaén, ya que el dinero de dichas actuaciones obtendría mayor rédito electoral si se gastara en Madrid o Barcelona. Además, en los partidos no se necesitarían representantes "de provincias".